Сети Петри: происхождение

Впоследствии было обнаружено, что сети Петри лучше всего пригодились для описания поведения распределенных систем взаимодействующих процессов, в которых проявляются такие свойства как

- итерационное выполнение действий (рекурсия),
- параллельное выполнение действий,
- неоднозначность выбора очередного действия,
- конкуренция за вычислительные и информационные ресурсы.

Сети Петри: основные понятия

Определение 1.

Сетью называется двудольный ориентированный граф $N = (P, T, F)$, в котором

- P — непустое множество позиций (мест, places);
- T — непустое множество переходов (transitions);
- $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ — непустое множество дуг (arcs).

При этом предполагается, что множества позиций и переходов не пересекаются, т.е. $P \cap T = \varnothing$, и каждая вершина сети $x, x \in P \cup T$, инцидентна хотя бы одной вершине другого типа, т.е. изолированные вершины отсутствуют.

Сети Петри: основные понятия

Пусть X — произвольное непустое множество.

Тогда мультимножеством с основой X назовем всякую функцию $M : X \to \mathbb{N}$, где $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Основа X – это список типов ресурсов, а мультимножество M — это перечень количества ресурсов каждого типа. Для каждого элемента $x, x \in X,$ значение $M(x)$ называется кратностью элемента x в мультимножестве M .

В мультимножестве, в отличие от множества, может быть несколько копий одного и того же элемента. Если $M(x) = 0$ для некоторого элемента x , то это означает, что в мультимножестве M нет ни одной копии элемента x .

Если множество-основа X линейно упорядочена, т.е. $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, то мультимножество M представимо целочисленным вектором $\langle M(x_1), M(x_2), \dots, M(x_n) \rangle$.

Сети Петри: основные понятия

Для мультимножеств можно ввести операции аналогичные операциям над множествами

Пусть M, N — два мультимножества с одной и той же основой $X = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$. Тогда

$$M \cup N = \langle \max(M(x_1), N(x_1)), \max(M(x_2), N(x_2)), \ldots, \max(M(x_n), N(x_n)) \rangle,$$

$$M \cap N = \langle \min(M(x_1), N(x_1)), \min(M(x_2), N(x_2)), \ldots, \min(M(x_n), N(x_n)) \rangle,$$

$$M + N = \langle M(x_1) + N(x_1), M(x_2) + N(x_2), \ldots, M(x_n) + N(x_n) \rangle ,$$

$$M \ominus N = \langle M(x_1) \ominus N(x_1), M(x_2) \ominus N(x_2), \ldots, M(x_n) \ominus N(x_n) \rangle ,$$

где

$$k \ominus m = \begin{cases} k - m, & \text{если} \quad k \geq m, \\ 0, & \text{если} \quad k < m. \end{cases}$$

Например, в случае $M = \langle 3, 5, 1 \rangle, N = \langle 2, 0, 4 \rangle$

$$((M \cap N) + M) \ominus (M \cup N) = \langle 2, 0, 0 \rangle$$

Сети Петри: основные понятия

Определение 2.

Обыкновенной сетью Петри называется система $\pi = (P, T, F, W, M_0)$, в которой

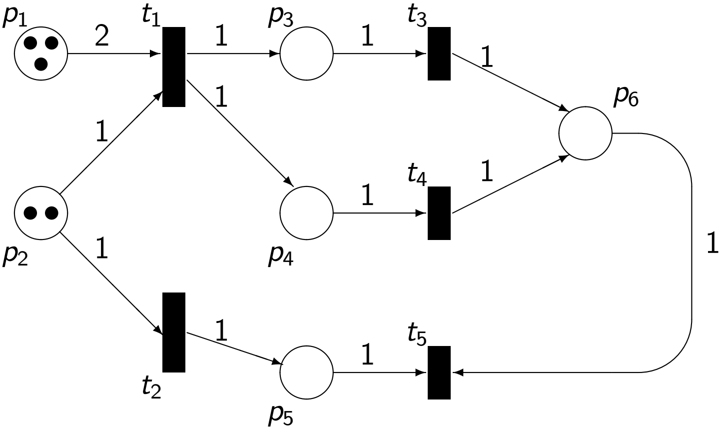
- (P, T, F) — сеть;
- W — мультимножество с основой F — распределение весов на дугах сети;
- M_0 — мультимножество с основой P — начальная разметка сети.

Позиции — это типы ресурсов, а переходы — это преобразователи ресурсов.

Распределение весов оценивает значимость каждого типа ресурсов для выполнения преобразований.

Начальная разметка — это исходное состояние ресурсов.

Сети Петри: основные понятия



Обыкновенная сеть Петри $\pi = (P, T, F, W, M_0)$

Сети Петри: основные понятия

Разметкой сети $N = (P, T, F)$ называется всякое мультимножество M с основой P ; это распределение ресурсов по типам (позициям).

Множество всех разметок сети N обозначим записью $\mathcal{M}_P$

На множестве разметок введем отношение частичного порядка: $M_1 \preceq M_2 \;\Leftrightarrow\; \forall\, x \in P \;:\; M_1(x) \leq M_2(x)$.

Например, $\langle 2, 4, 0, 1 \rangle \preceq \langle 3, 4, 2, 2 \rangle$.

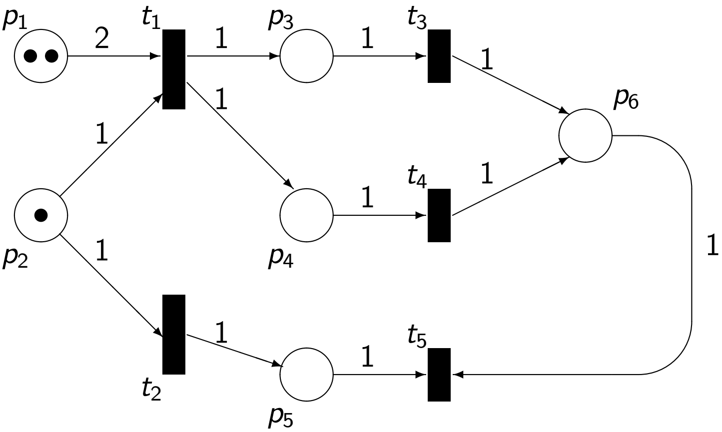
Сети Петри: основные понятия

Для заданного распределения весов W на множестве дуг сети $N = (P, T, F)$ и для заданного перехода $t, t \in T$, введем два вида разметок $F_W(\bullet, t)$ и $F_W(t, \bullet)$, которые определяются соотношениями:

$$F_W(\bullet, t)(p) = \begin{cases} W(p, t) & \text{если} \quad (p, t) \in F, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

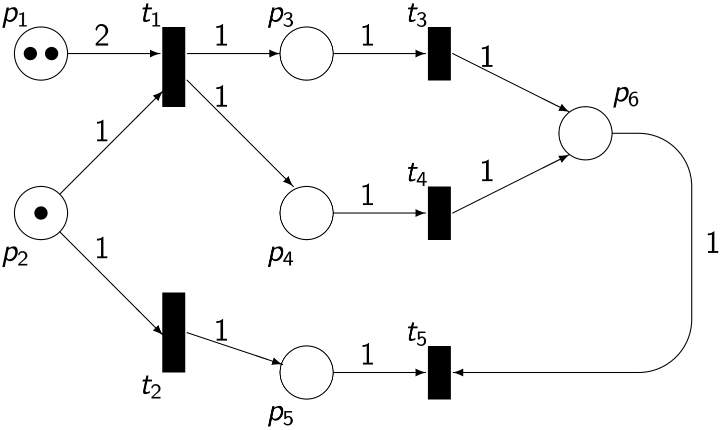
$$F_W(t, \bullet)(p) = \begin{cases} W(t, p) & \text{если} \quad (t, p) \in F, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Сети Петри: основные понятия



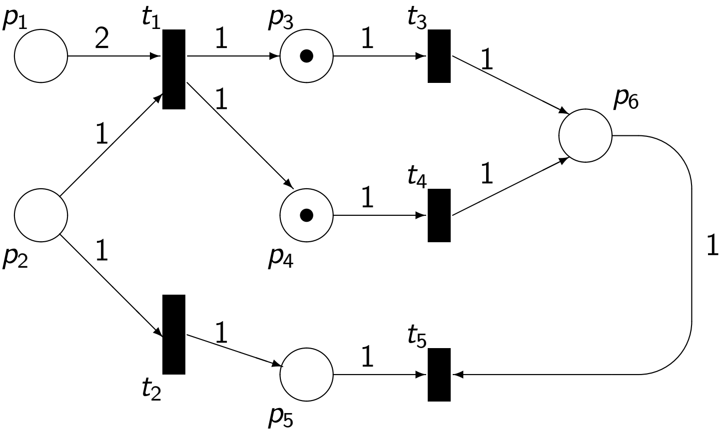
Обыкновенная сеть Петри $\pi = (P, T, F, W, M_0)$

Сети Петри: основные понятия



$F_W(\bullet, t_1) = \langle 2, 1, 0, 0, 0, 0 \rangle$

Сети Петри: основные понятия



$F_W(t_1, \bullet) = \langle 0, 0, 1, 1, 0, 0 \rangle$

Сети Петри: основные понятия

Поведение сети Петри проявляется в последовательном срабатывании переходов, приводящем к изменению разметки.

Пусть задана сеть Петри $\pi = (P, T, F, W, M_0)$, переход $t, t \in T$, и разметка сети M .

Определение 3.

Переход t считается активным в разметке M , если выполнено условие $F_W(\bullet, t) \preceq M$.
Разметка, в которой ни один переход сети не является активным, называется тупиковой .

Определение 4.

Результатом срабатывания активного в разметке M перехода t является разметка

$$M' = (M \ominus F_W(\bullet, t)) + F_W(t, \bullet).$$

Сети Петри: основные понятия

Таким образом, на множестве разметок $\mathcal{M}_P$ сети Петри $\pi = (P, T, F, W, M_0)$ можно ввести отношение срабатывания переходов :

разметка M' непосредственно следует за разметкой M относительно перехода $t, t \in T$, (обозначается записью $M \xrightarrow{t} M'$) в том и только том случае, когда

1) переход t активен в разметке M , и
2) разметка M' является результатом срабатывания перехода t в разметке M .

Рефлексивно-транзитивное замыкание отношения срабатывания переходов условимся обозначать записью $M \xrightarrow{t_1, t_2, \ldots, t_k}_* M'$:

$$M \xrightarrow{t_1, t_2, \ldots, t_k}_* M' \Leftrightarrow M \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} \cdots \xrightarrow{t_k} M'.$$

Сети Петри: основные понятия

Вычислением сети Петри $\pi = (P, T, F, W, M_0)$ называется всякая последовательность (конечная или бесконечная) непосредственно следующих друг за другом разметок, начинающаяся начальной разметкой M_0 :

$$M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} \cdots \xrightarrow{t_i} M_i \xrightarrow{t_{i+1}} \cdots .$$

Разметка M' достижима из разметки M в сети Петри π (обозначается $M \longrightarrow_* M'$), если отношение $M \xrightarrow{t_1, t_2, \ldots, t_k}_* M'$ выполняется для некоторой последовательности переходов $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

Разметка M' достижима в сети Петри π , если она достижима из начальной разметки M_0 в сети Петри π . Множество всех разметок, достижимых (из разметки M) в сети Петри π , обозначим записью $R(\pi)$ (соответственно $R(\pi, M)$).

Сети Петри: основные понятия

Графом достижимых разметок сети Петри π называется ориентированный граф G_π , вершинами которого являются достижимые разметки из множества $R(\pi)$.

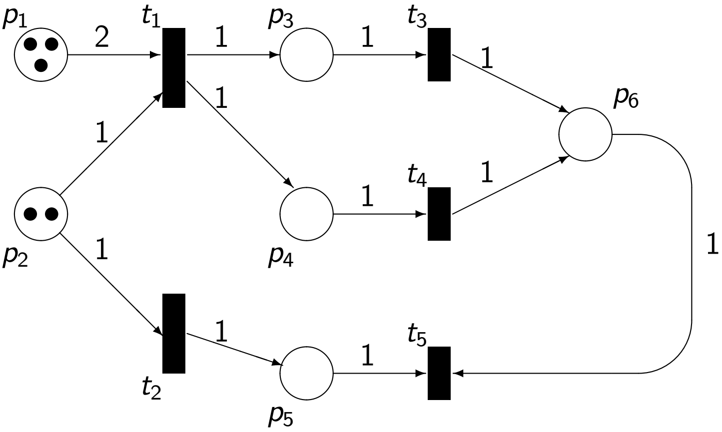
В графе G_π из вершины M в вершину M' ведет дуга, помеченная переходом t в том и только том случае, если для сети Петри π выполняется соотношение $M \xrightarrow{t} M'$.

Граф достижимых разметок сети Петри может быть конечным, но может быть также и бесконечным.

Каждый маршрут в графе G_π , исходящий из начальной вершины M_0 , соответствует некоторому вычислению сети Петри π .

Сети Петри: основные понятия

Пример графа достижимых разметок



Сети Петри: основные понятия

Пример графа достижимых разметок

$$\begin{tikzcd}
 & M_0 = \langle 3,2,0,0,0,0\rangle \arrow[dl, "t_1"'] \arrow[dr, "t_2"] & & \\
M_1 = \langle 1,1,1,1,0,0\rangle \arrow[dr, "t_2"'] & & M_2 = \langle 3,1,0,0,1,0\rangle \arrow[dl, "t_1"'] \arrow[dr, "t_2"] & \\
 & M_3 = \langle 1,0,1,1,1,0\rangle & & M_4 = \langle 3,0,0,0,2,0\rangle
\end{tikzcd}$$

тупиковая разметка

и т. д.

Сети Петри: основные понятия

Рассмотрим произвольный алфавит $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ и пометим каждый переход $t, t \in T$, сети Петри π некоторой буквой $\varphi(t)$ из этого алфавита.

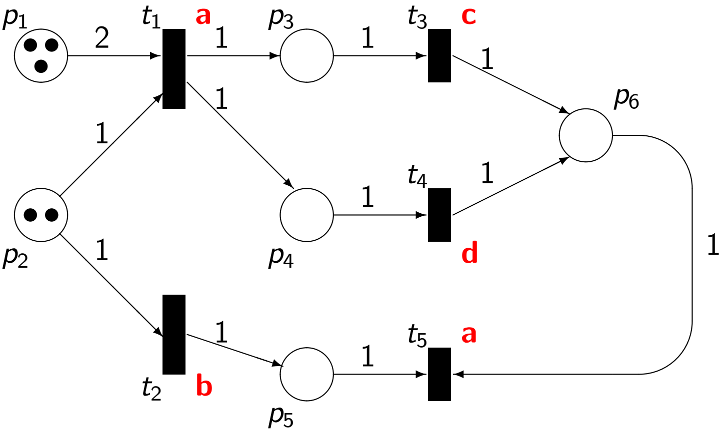
Свободным языком сети Петри π называется множество слов

$$L(\pi) = \{w = \varphi(t_1)\varphi(t_2)\ldots\varphi(t_m)\ :\ \exists\, M \in R(\pi)\ :\ M_0 \xrightarrow[*]{t_1, t_2, \ldots, t_m} M\},$$

которыми помечены разнообразные последовательности срабатываний переходов.

Сети Петри: основные понятия

Язык сети Петри π .



$bacda \in L(\pi),\ bb \in L(\pi),\ bba \notin L(\pi)$

Сети Петри: основные понятия

Теорема о свойстве монотонности сетей Петри.

Пусть M и K — две разметки сети (P, T, F) .

Предположим, что переход t активен в разметке M сети Петри $\pi_1 = (P, T, F, W, M)$, и в результате его срабатывания образуется разметка M' .

Тогда переход t также активен в разметке $M + K$ сети Петри $\pi_2 = (P, T, F, W, M + K)$, и в результате его срабатывания образуется разметка $M'' = M' + K$.

Доказательство.

Если $M \xrightarrow{t} M'$, то $F_W(\bullet, t) \preceq M$ и справедливо равенство $M' = (M \ominus F_W(\bullet, t)) + F_W(t, \bullet)$.

Тогда $F(\bullet, t) \preceq M + K$, и поэтому переход t активен в разметке $M + K$ сети π_2 .
При его срабатывании образуется разметка

$$M'' = ((M + K) \ominus F_W(\bullet, t)) + F_W(t, \bullet) = M' + K \ . \ \square$$

Сети Петри: основные понятия

Следствие.
Пусть $\pi_1 = (P, T, F, W, M)$ и $\pi_2 = (P, T, F, W, M + K)$ — пара сетей Петри, в основе которых лежит одна и та же сеть (P, T, F) . Тогда

1) для любой последовательности переходов $t_1, t_2, \dots, t_k$ и разметки M' верно соотношение
$M_1 \xrightarrow{t_1, t_2, \dots, t_k}_* M' \implies M + K \xrightarrow{t_1, t_2, \dots, t_k}_* M' + K$.
2) для любой разметки M' из множества $R(\pi_1)$ разметка $M' + K$ принадлежит множеству $R(\pi_2)$.
3) $L(\pi_1) \subseteq L(\pi_2)$.

Это основная теорема теории сетей Петри; на ее основе можно эффективно анализировать поведение сетей.

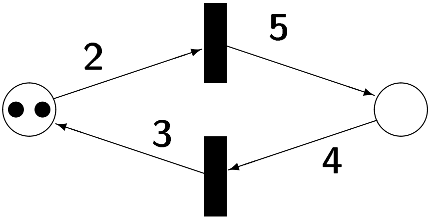
Сети Петри: области применения и свойства поведения

Позиция p в сети Петри $\pi = (P, T, F, W, M)$ называется ограниченной , если существует такое число n , что для любой разметки $M', M' \in R(\pi)$, верно равенство $M'(p) \leq n$.

Сеть Петри называется ограниченной , если любая ее позиция ограничена.

Очевидно, что сеть Петри ограничена тогда и только тогда, когда множество ее достижимых разметок $R(\pi)$ конечно.

Сети Петри: области применения и свойства поведения



Пример неограниченной сети Петри.

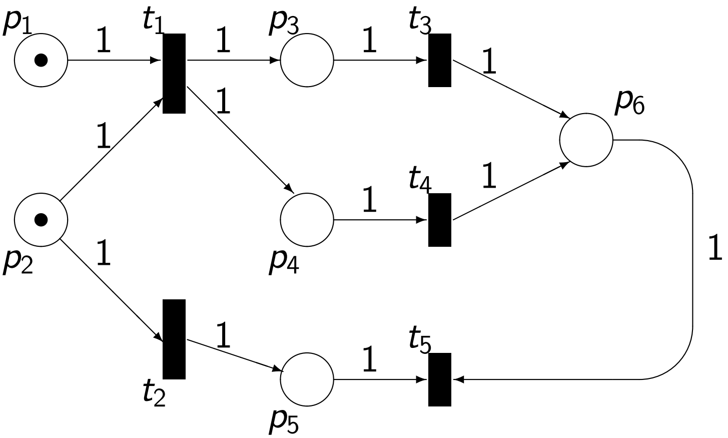
Сети Петри: области применения и свойства поведения

Позиция p в сети Петри $\pi = (P, T, F, W, M)$ называется безопасной , если для любой разметки $M', M' \in R(\pi)$, верно равенство $M'(p) \leq 1$.

Сеть Петри называется безопасной , если любая ее позиция безопасна.

Свойство безопасности разумно проверять только для ординарных сетей Петри, у которых веса всех дуг равны 1.

Сети Петри: основные понятия



Пример небезопасной сети Петри.

Сети Петри: области применения и свойства поведения

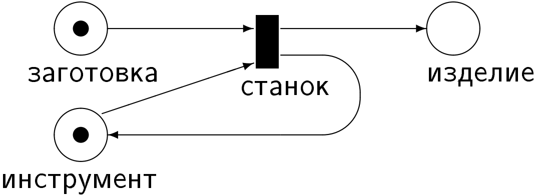
Сеть Петри $\pi = (P, T, F, W, M)$ называется консервативной , если для любой разметки $M', M' \in R(\pi)$, верно равенство $\sum\limits_{p \in P} M(p) = \sum\limits_{p \in P} M'(p)$.

В консервативных сетях общее число фишек остается неизменным на протяжении любого вычисления сети.

Нетрудно проверить, что сеть Петри $\pi = (P, T, F, W, M)$ является консервативной тогда и только тогда, когда для любого перехода $t, t \in T$, верно равенство $F_W(\bullet, t) = F_W(t, \bullet)$.

Сети Петри: области применения и свойства поведения

Производственные процессы и бизнес-процессы.



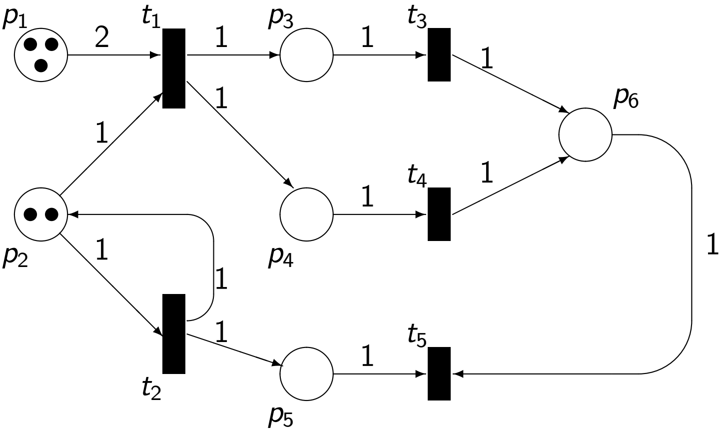
Сети Петри: области применения и свойства поведения

Переход t в сети Петри $\pi = (P, T, F, W, M)$ называется живым , если для любой разметки $M', M' \in R(\pi)$, существует такая разметка $M'', M'' \in R(\pi, M')$, верно соотношение $F_W(\bullet, t) \preceq M''$.

Живость перехода t означает, что любое конечное вычисление можно продолжить таким образом, чтобы на некотором шаге сработал переход t .

Сеть называется живой , если все переходы сети являются живыми.

Сети Петри: основные понятия



Переход t_2 является живым.
Все остальные переходы живыми не являются.

Сети Петри: области применения и свойства поведения

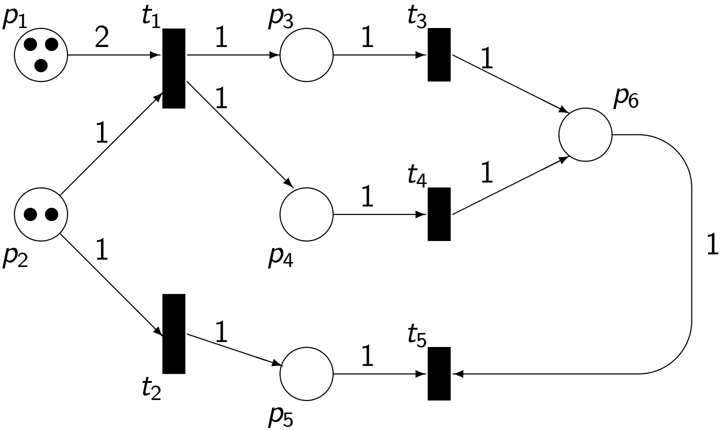
Переход t в сети Петри $\pi = (P, T, F, W, M)$ называется устойчивым (persistent), если для любой разметки $M', M' \in R(\pi)$, и для любого перехода $t', t' \neq t$, верно соотношение

$$F_W(\bullet, t) \preceq M' \wedge F_W(\bullet, t') \preceq M' \;\Rightarrow\; F_W(\bullet, t) + F_W(\bullet, t') \preceq M'.$$

Устойчивость перехода t означает, что если этот переход может сработать, то никакой другой переход не может, сработав, лишить его этой возможности.

Сеть называется устойчивой , если все переходы сети являются устойчивыми.

Сети Петри: основные понятия



Переход t_1 является неустойчивым.
Все остальные переходы являются устойчивыми.

Сети Петри: области применения и свойства поведения

Задачи анализа сетей Петри — это задачи проверки свойств ограниченности, безопасности, живости, устойчивости, а также две центральные задачи теории сетей Петри:

- проблема достижимости : для заданной сети Петри $\pi = (P, T, F, W, M)$ и заданной разметки M' проверить включение $M' \in R(\pi)$;
- проблема R-эквивалентности : для заданной пары сетей Петри $\pi_1 = (P, T_1, F_1, W_1, M_1)$ и $\pi_2 = (P, T_2, F_2, W_2, M_2)$ с одним и тем же множеством позиций P проверить равенство $R(\pi_1) = R(\pi_2)$.

Изучение этих задач проведем в следующих лекциях.

Проблема ограниченности для сетей Петри

Позиция p в сети Петри $\pi = (P, T, F, W, M)$ называется ограниченной , если существует такое число n , что для любой разметки $M', M' \in R(\pi)$, верно равенство $M'(p) \leq n$.

Сеть Петри называется ограниченной , если любая ее позиция ограничена.

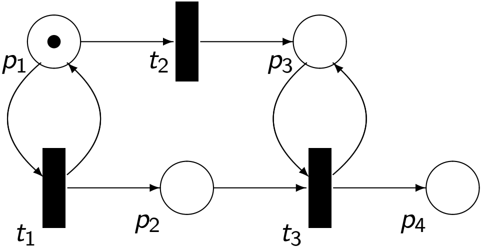
Проблема ограниченности состоит в том, чтобы для произвольной заданной сети Петри проверить, является ли она ограниченной.

Очевидно, что сеть Петри ограничена тогда и только тогда, когда множество ее достижимых разметок $R(\pi)$ конечно.

Чтобы убедиться в этом, достаточно построить граф достижимых разметок $G(\pi)$ и убедиться, что в этом графе конечное число вершин. Однако непросто убедиться в том, что граф $G(\pi)$ имеет бесконечно много вершин.

Проблема ограниченности для сетей Петри

Пример неограниченной сети Петри



Проблема ограниченности для сетей Петри

Критерий неограниченности сети Петри

Сеть Петри $\pi = (P, T, F, W, M_0)$ является неограниченной тогда и только тогда, когда существует хотя бы одно такое вычисление

$$M_0 \xrightarrow{\tau'}_* M' \xrightarrow{\tau''}_* M'',$$

в котором для пары конфигураций M', M'' выполняется соотношение $M' \preceq M''$, причем хотя бы для одной позиции p справедливо строгое неравенство $M'(p) < M''(p)$.

Доказательство.

($\Leftarrow$) Из условия $M' \preceq M''$ следует, что $M'' = M' + K$ для некоторой разметки K .
Из условия $M'(p) < M''(p)$ следует, что разметка K — непустое мультимножество позиций.
Из основной теоремы о монотонности вычислений сетей Петри следует, что $M' + nK \in R(\pi)$ для любого целого $n, n \geq 0$.

Проблема ограниченности для сетей Петри

Доказательство.

($\Rightarrow$) Если сеть Петри π неограничена, то ее граф достижимых разметок $G(\pi)$ имеет бесконечно много вершин, достижимых из начальной разметки M .
Тогда, по **лемме Кенига**, в таком графе существует бесконечная цепь (маршрут без повторяющихся вершин)

$$\alpha = M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} M_2 \xrightarrow{t_3} \cdots$$

Лемма о бесконечных множествах разметок.

Из любой бесконечной последовательности разметок $M_0, M_1, M_2, M_3, \ldots$ можно выделить бесконечную монотонно возрастающую подпоследовательность разметок $M_{r_1} \preceq M_{r_2} \preceq M_{r_3} \preceq \ldots$.

Доказательство основной леммы

Каждая разметка может быть представлена набором натуральных чисел $M_i = \langle n_{1i}, n_{2i}, \ldots, n_{mi} \rangle$.

Заметим, что никакая последовательность натуральных чисел не может быть бесконечно убывающей.

Поэтому в бесконечной последовательности разметок α можно выделить бесконечную подпоследовательность разметок

$$\alpha^{(1)} = M_{i_1}, M_{i_2}, \ldots, M_{i_k}, \ldots,$$

в которой первые компоненты наборов, задающих эти разметки, образуют неубывающую последовательность $n_{1i_1} \leq n_{1i_2} \leq n_{1i_3} \leq \ldots$.

Точно так же в бесконечной последовательности разметок $\alpha^{(1)}$ можно выделить бесконечную подпоследовательность разметок

$$\alpha^{(2)} = M_{j_1}, M_{j_2}, \ldots, M_{j_\ell}, \ldots,$$

в которой вторые компоненты наборов, задающих эти разметки, образуют неубывающую последовательность $n_{2j_1} \leq n_{2j_2} \leq n_{2j_3} \leq \ldots$.

Проблема ограниченности для сетей Петри

Проведя такое выделение подпоследовательностей m раз (по числу позиций в сети π), получим бесконечную неубывающую последовательность попарно различных разметок

$$\alpha^{(m)} = M_{r_1} \preceq M_{r_2} \preceq M_{r_3} \preceq \dots .$$

Лемма о бесконечных множествах разметок доказана.

Поскольку разметки этой последовательности располагаются друг за другом на одном и том же маршруте в графе достижимых разметок $G(\pi)$, приходим к заключению о том, что пара различных разметок M_{r_1}, M_{r_2} удовлетворяет соотношению

$$M_0 \xrightarrow{\tau'}_* M_{r_1} \xrightarrow{\tau''}_* M_{r_2}$$

для некоторых конечных последовательностей переходов τ', τ'' и при этом справедливо неравенство $M_{r_1} \preceq M_{r_2}$.

$\square$

Деревья покрытия разметок сетей Петри

Критерий неограниченности сети Петри позволяет построить алгоритм решения проблемы ограниченности сети.

Этот алгоритм осуществляет проверку ограниченности сети Петри путем построения т.н. **дерева покрытия разметок** .

Вершинами этого дерева служат наборы, состоящие из натуральных чисел, а также специального символа ∞ . Наборы, в которых содержится символ ∞ , будем называть предельными .

Предельные наборы можно рассматривать как разметки особого рода: равенство $M(p) = \infty$ для некоторой позиции p означает, что в этой позиции может быть накоплено бесконечно много фишек.

Предельные наборы можно сравнивать друг с другом и с наборами натуральных чисел (разметками) покомпонентно, полагая, что $n < \infty$ для любого натурального числа n .

Деревья покрытия разметок сетей Петри

При построении дерева покрытия разметок предельные наборы будут возникать всякий раз, когда обнаруживаются пары сравнимых разметок.

Пусть заданы две разметки M', M'' сети Петри π и при этом $M' \prec M''$. Тогда запись $[M', M'']$ будет обозначать предельный набор, который удовлетворяет следующим равенствам для любой позиции p :

$$[M', M''](p) = \begin{cases} M''(p), & \text{если} \quad M'(p) = M''(p), \\ \infty, & \text{если} \quad M'(p) < M''(p). \end{cases}$$

Дерево покрытия разметок $\Gamma(\pi)$ сети Петри $\pi = (P, T, F, W, M_0)$ устроено следующим образом.

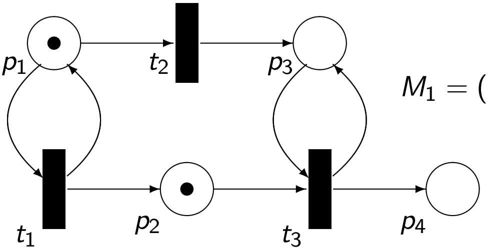
1) В качестве внутренних (нелистовых) вершин используются только наборы натуральных чисел, соответствующие разметкам сети π .
2) Предельные наборы служат только листовыми вершинами.

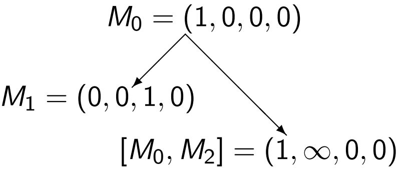
Деревья покрытия разметок сетей Петри

3) корнем дерева является начальная разметка M_0 ;
4) разметка M сети π , входящая в состав дерева $\Gamma(\pi)$, служит листовой вершиной тогда и только тогда, когда
   - либо M является тупиковой разметкой сети π ,
   - либо M встречалась ранее в дереве $\Gamma(\pi)$ на пути из корня M_0 в вершину M ;
5) если вершина M не является листовой, и $M \xrightarrow{t} M''$ для некоторого перехода t , то в дереве $\Gamma(\pi)$ имеется дуга, ведущая из вершины M в такую вершину $\widehat{M}$, что
   - $\widehat{M} = M''$, если на пути из из корня M_0 в вершину M нет вершин M' , удовлетворяющих отношению $M' \prec M''$;
   - $\widehat{M} = [M', M'']$, если на пути из из корня M_0 в вершину M встречается такая вершина M' , для которой справедливо сравнение $M' \prec M''$.

Деревья покрытия разметок сетей Петри

Пример дерева покрытия разметок $\Gamma(\pi)$ для сети Петри π .





$M_0 \xrightarrow{t_1} M_2 = (1, 1, 0, 0)$

$M_0 \prec M_2$

$[M_0, M_2] = (1, \infty, 0, 0)$

Деревья покрытия разметок сетей Петри

Теорема о дереве покрытия разметок

1. Для любой сети Петри π дерево покрытия разметок $\Gamma(\pi)$ является конечным.

2. Сеть Петри π является ограниченной тогда и только тогда, когда в дереве покрытия разметок $\Gamma(\pi)$ отсутствуют предельные вершины.

Доказательство.

Следует из критерия неограниченности сетей Петри и определения дерева покрытия разметок.

Деревья покрытия разметок сетей Петри

Следствия из теоремы о дереве покрытия разметок

1. Проблема ограниченности обыкновенных сетей Петри алгоритмически разрешима.

2. Проблема безопасности ординарных сетей Петри алгоритмически разрешима.

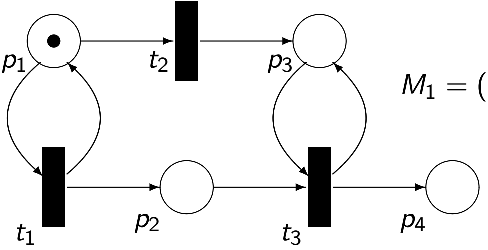
Задача 1 [трудная]

А какова сложность предложенного алгоритма проверки ограниченности сетей Петри путем построения деревьев покрытия разметок?

Деревья покрытия разметок сетей Петри

Иногда важно не только установить, что сеть Петри является неограниченной, но также и определить, в каких позициях может накапливаться бесконечно много фишек.

Для этого дерева покрытия разметок $\Gamma(\pi)$ уже недостаточно, поскольку анализ вычислений на его ветвях обрывается при обнаружении первого же покрытия разметок $M' \prec M''$.



$$M_0 = (1, 0, 0, 0)$$

$$M_1 = (0, 1, 0, 0) \qquad [M_0, M_2] = (1, \infty, 0, 0)$$

В этой сети неограничены позиции p_2 и p_4 , но граф $\Gamma(\pi)$ обнаруживает только неограниченность p_2 .

Деревья покрытия разметок сетей Петри

Но построение дерева покрытия можно продожить, если обращаться с предельными наборами так же, как с обычными разметками.

Условимся, что для любого натурального числа m верны равенства $\infty + m = \infty - m = \infty$.

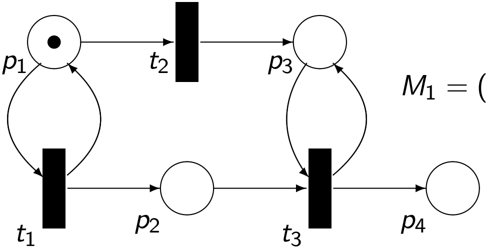
Тогда для всякого предельного набора M и перехода t в произвольной сети Петри π можно определить

- условие срабатывания перехода: $F_W(\bullet, t) \preceq M$,
- результат срабатывания перехода: $M' = (M \ominus F_W(\bullet, t)) + F_W(t, \bullet)$.

Таким образом, построение дерева покрытия разметок $\Gamma(\pi)$ может быть продожено из предельных вершин.

Полученное в результате такого построения дерево называется полным деревом покрытия разметок сети Петри π .

Деревья покрытия разметок сетей Петри



$$
\begin{tikzcd}
 & M_0 = (1,0,0,0) \arrow[dl, "t_2"'] \arrow[dr, "t_1"] & \\
M_1 = (0,1,0,0) & & M_2' = (1,\infty,0,0) \arrow[dl, "t_1"'] \arrow[dd, "t_2"] \\
 & M_3' = (1,\infty,0,0) & \\
 & & M_4' = (0,\infty,1,0) \arrow[d, "t_3"] \\
 & & M_5' = (0,\infty,1,\infty) \arrow[d, "t_3"] \\
 & & M_6' = (0,\infty,1,\infty)
\end{tikzcd}
$$

Полное дерево покрытия разметок сети Петри

Деревья покрытия разметок сетей Петри

Теорема о полном дереве покрытия разметок

1. Для любой сети Петри π полное дерево покрытия разметок является конечным.

2. В сети Петри π позиция p является ограниченной тогда и только тогда, когда для любой вершины M в полном дереве покрытия разметок верно $M(p) \neq \infty$.

Доказательство.

Самостоятельно.

Деревья покрытия разметок сетей Петри

Полные деревья разметок можно использовать также и для проверки существенности переходов в сети Петри.

Переход t в сети Петри π называется мертвым , если он не является активным ни в одной разметке M из множества $R(\pi)$, т.е. не срабатывает ни в одном вычислении сети π .

Теорема о мертвых переходах

Переход t в сети Петри π является мертвым тогда и только тогда, когда ни одна дуга (M', M'') в полном дереве покрытия разметок не помечена переходом t .

Доказательство.

Самостоятельно.

Проблема R-эквивалентности для сетей Петри

На множестве сетей Петри можно определять разные виды отношений эквивалентности:

1. **языковая эквивалентность** — сети π_1 и π_2 порождают один и тот же язык $L(\pi_1) = L(\pi_2)$;
2. **R-эквивалентность** — в сетях π_1 и π_2 достижимо одно и то же множество разметок $R(\pi_1) = R(\pi_2)$;
3. **бисимуляционная эквивалентность** — графы достижимых разметок $G(\pi_1)$ и $G(\pi_2)$ находятся в отношении бисимуляции;
4. другие виды эквивалентности.

Ограничимся изучением отношения R-эквивалентности для сетей Петри.

Проблема R-эквивалентности состоит в том, чтобы для заданной пары сетей Петри π_1 и π_2 с одним и тем же множеством позиций P проверить равенство $R(\pi_1) = R(\pi_2)$.

Неразрешимость проблемы R-эквивалентности

Теорема о неразрешимости проблемы R-эквивалентности для сетей Петри.

Проблема R-эквивалентности для сетей Петри неразрешима.

Доказательство.

Покажем, что проблема R-включения для сетей Петри сводима к проблеме R-эквивалентности, т.е. для произвольной пары сетей Петри π_1, π_2 можно построить такую пару сетей π_1', π_2' , для которой верно соотношение

$$R(\pi_1) \subseteq R(\pi_2) \;\Leftrightarrow\; R(\pi_1') = R(\pi_2')$$

Поскольку $R(\pi_1) \subseteq R(\pi_2) \;\Leftrightarrow\; R(\pi_2) = R(\pi_1) \cup R(\pi_2)$, достаточно показать, как для произвольной пары сетей π_1, π_2 построить такую сеть π_0 , для которой выполняется равенство $R(\pi_0) = R(\pi_1) \cup R(\pi_2)$.

Неразрешимость проблемы R-эквивалентности

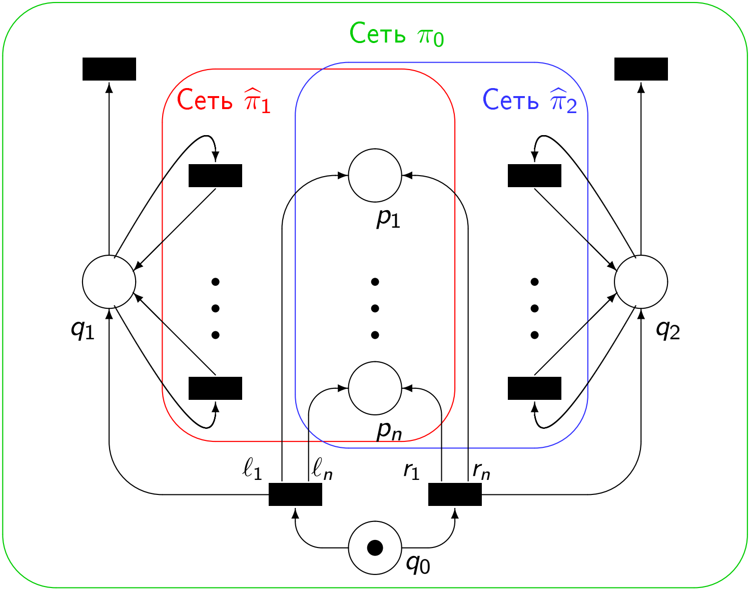
Доказательство.

Без ограничения общности будем считать, что сети π_1 и π_2 имеют одно и то же множество позиций $p_1, \ldots, p_n$.

Обозначим записями $\widehat{\pi}_1, \widehat{\pi}_2$ сети, полученные из сетей Петри π_1, π_2 за счет удаления из них всех фишек начальных разметок M_1 и M_2 соответственно.

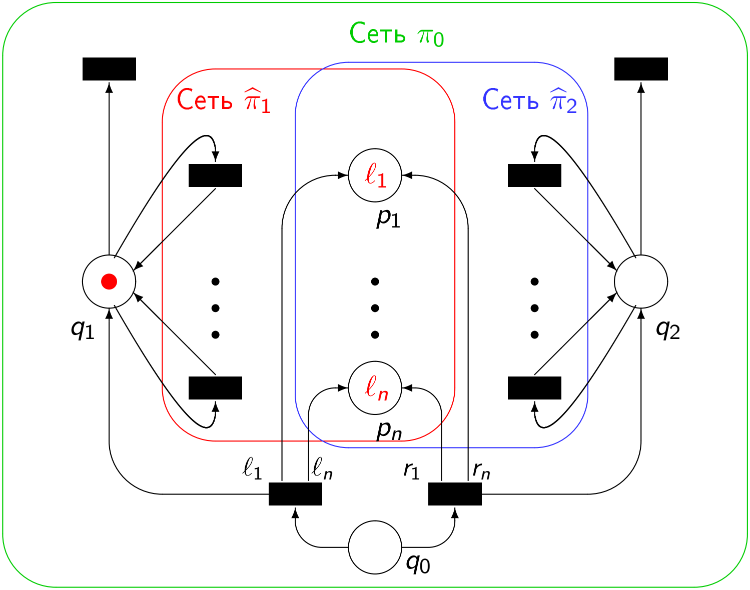
Тогда сеть Петри π_0 , являющаяся объединением сетей π_1 и π_2 , устроена следующим образом.
Подсети $\widehat{\pi}_1, \widehat{\pi}_2$ имеют общее множество позиций $p_1, \ldots, p_n$, но раздельные множества переходов.
В начале всякого вычисления сети π_0 недетерминированно выбирается один из режимов работы π_1 или π_2 , проводится загрузка в позиции сети соответствующей начальной разметки M_1 или M_2 , а затем воспроизводится вычисление выбранной сети. Разметка, достигнутая в этом вычислении, фиксируется.

Неразрешимость проблемы R-эквивалентности



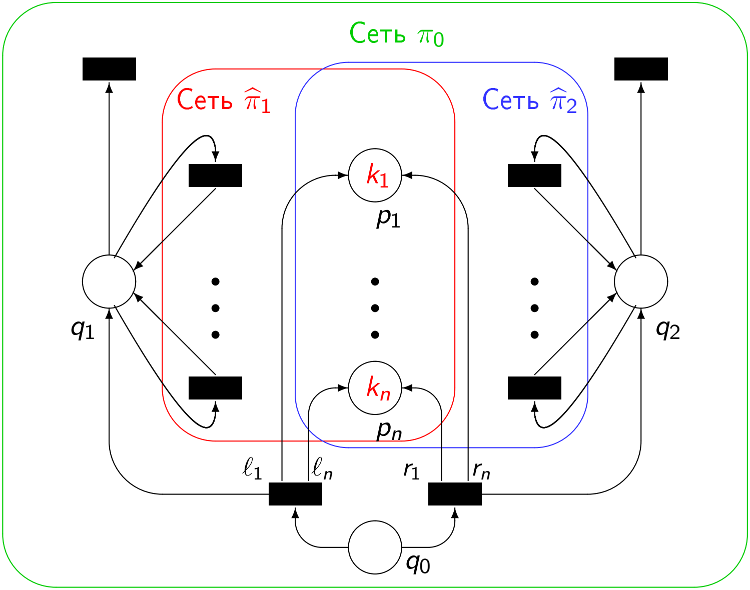
$\ell_1 = M_1(p_1), \ldots, \ell_n = M_1(p_n)$ $\qquad$ $r_1 = M_2(p_1), \ldots, r_n = M_2(p_n)$

Неразрешимость проблемы R-эквивалентности



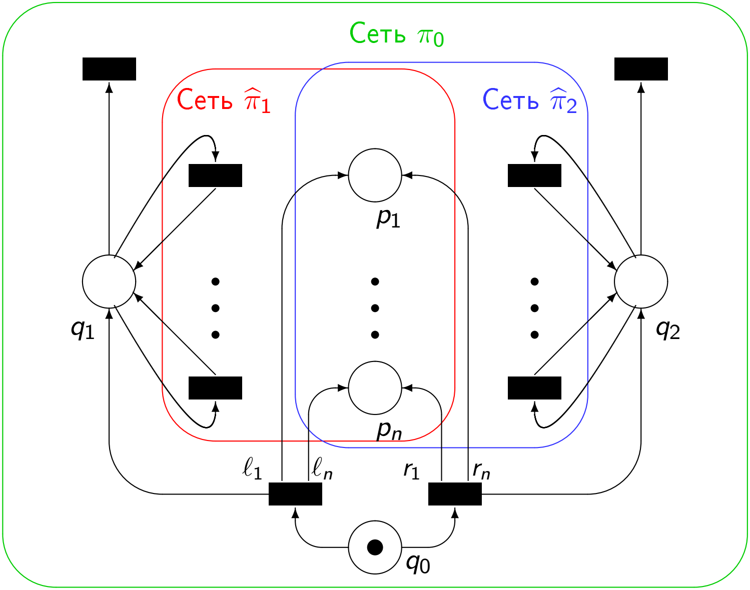
$\ell_1 = M_1(p_1), \ldots, \ell_n = M_1(p_n)$ $\qquad$ $r_1 = M_2(p_1), \ldots, r_n = M_2(p_n)$

Неразрешимость проблемы R-эквивалентности



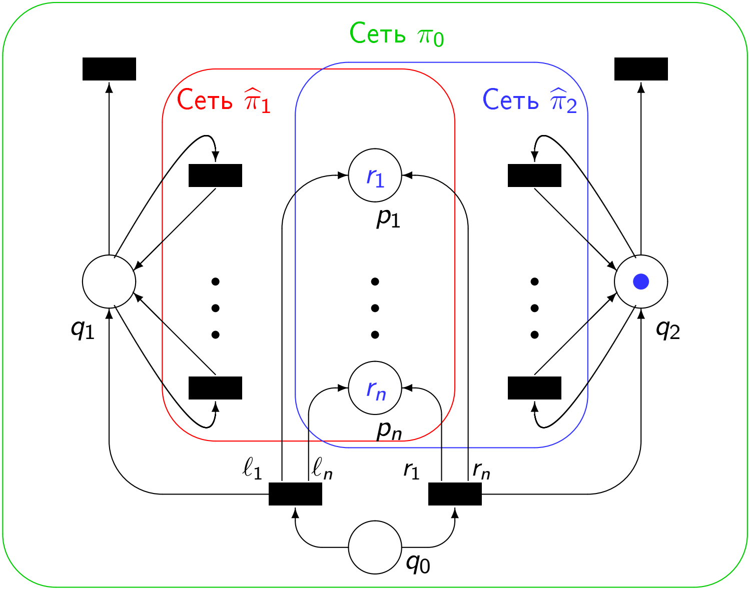
$\ell_1 = M_1(p_1), \ldots, \ell_n = M_1(p_n)$ $\qquad$ $r_1 = M_2(p_1), \ldots, r_n = M_2(p_n)$

Неразрешимость проблемы R-эквивалентности



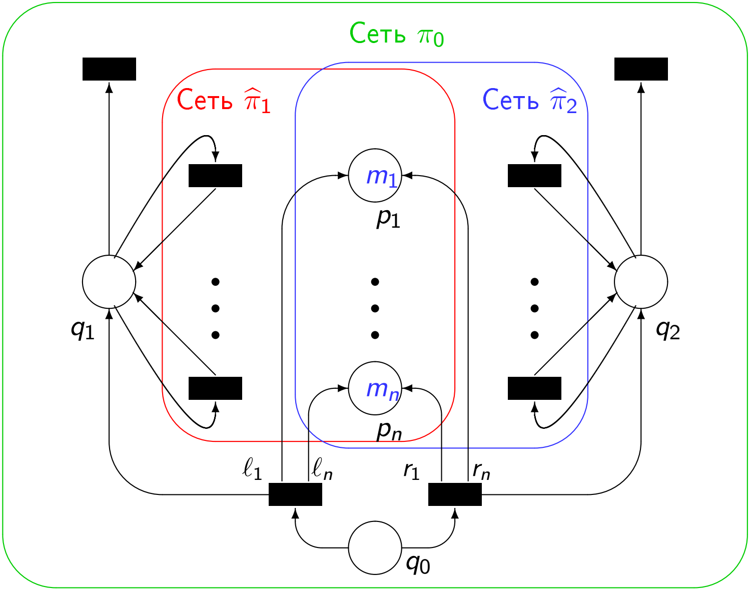
$\ell_1 = M_1(p_1), \dots, \ell_n = M_1(p_n)$ $\qquad$ $r_1 = M_2(p_1), \dots, r_n = M_2(p_n)$

Неразрешимость проблемы R-эквивалентности



$\ell_1 = M_1(p_1), \ldots, \ell_n = M_1(p_n)$ $\qquad$ $r_1 = M_2(p_1), \ldots, r_n = M_2(p_n)$

Неразрешимость проблемы R-эквивалентности



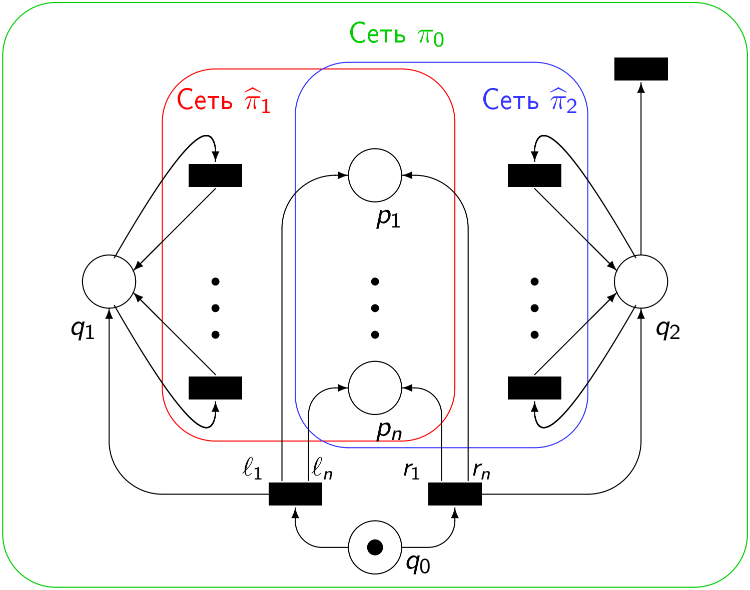
$\ell_1 = M_1(p_1), \ldots, \ell_n = M_1(p_n)$ $\qquad$ $r_1 = M_2(p_1), \ldots, r_n = M_2(p_n)$

Неразрешимость проблемы R-эквивалентности

Доказательство.

Тогда в качестве π_2' выбирается сеть π_0 , которая фиксирует достигнутые разметки обеих сетей π_1 и π_2 , а в качестве π_1' — фрагмент сети π_0 , который фиксирует только достигнутые разметки подсети π_2 .

Неразрешимость проблемы R-эквивалентности



$\ell_1 = M_1(p_1), \ldots, \ell_n = M_1(p_n)$ $\qquad$ $r_1 = M_2(p_1), \ldots, r_n = M_2(p_n)$

Неразрешимость проблемы R-эквивалентности

Доказательство.

Тогда в качестве π_2' выбирается сеть π_0 , которая фиксирует достигнутые разметки обеих сетей π_1 и π_2 (т.е. разметки из множества $R(\pi_1) \cup R(\pi_2)$), а в качестве π_1' — фрагмент сети π_0 , который фиксирует только достигнутые разметки подсети π_2 , т.е. разметки из множества $R(\pi_2)$.

Тогда получаем, что

$$R(\pi_1) \subseteq R(\pi_2) \;\Leftrightarrow\; R(\pi_1') = R(\pi_2')$$

$\square$